Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Tineretului

Olimpiada Naţională de Matematică 2008
Etapa judeţeană şi a Municipiului Bucureşti
1 martie 2008
CLASA A XI-A
SOLUŢII ŞI BAREMURI ORIENTATIVE

Subiectul 1. Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, să se arate că $\det(A^2 + A + I_2) \geq \frac{3}{4}(1 - \det A)^2$.

Soluţie. Fie $p(X) = \det(A - XI_2) = X^2 - aX + b$ (unde $a = \operatorname{tr} A, b = \det A$), polinomul caracteristic al matricei A. Atunci $\det(A^2 + A + I) = \det(A - \varepsilon I_2)(A - \varepsilon^2 I_2) = p(\varepsilon)p(\varepsilon^2)$, unde ε este o rădăcină nereală cubică a unităţii. **4p**
Rezultă $\det(A^2 + A + I) = (\varepsilon^2 - a\varepsilon + b)(\varepsilon - a\varepsilon^2 + b) = a^2 + a(b + 1) + b^2 - b + 1$ **2p**
Funcţia în a are minimul $\frac{3}{4}(b - 1)^2$ **1p**

Subiectul 2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Să se arate că $\operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B \leq n$, dacă şi numai dacă există matricea inversabilă $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, astfel încât $AXB = O_n$.

Soluţie. Dacă $AXB = O_n$ şi X este inversabilă atunci, folosind inegalitatea lui Sylvester,

$$0 = \operatorname{rang}(AXB) \geq \operatorname{rang}(AX) + \operatorname{rang} B - n \geq \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} X + \operatorname{rang} B - 2n$$
$$= \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B - n$$ **3p**

Reciproc, să presupunem că $\operatorname{rang}(A) = a$, $\operatorname{rang}(B) = b$, $a + b \leq n$. În acest caz, există matricele inversabile P, Q, R, S astfel încât

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_a & O_{a,n-a} \\ O_{n-a,a} & O_{n-a,n-a} \end{pmatrix},\ RBS = \begin{pmatrix} O_{n-b,n-b} & O_{n-b,b} \\ O_{b,n-b} & I_b \end{pmatrix}$$ **3p**

Rezultă $PAQRBS = O_n$, de unde $AXB = O_n$, cu $X = QR$ **1p**

Subiectul 3. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale strict pozitive, astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_{n+1} \geq \frac{x_n + y_n}{2},\ y_{n+1} \geq \sqrt{\frac{x_n^2 + y_n^2}{2}}.$$

a) Să se arate că şirurile $(x_n + y_n)_{n\geq 1}$ şi $(x_n y_n)_{n\geq 1}$ au limită.

b) Să se arate că şirurile $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ au limită şi limitele lor sunt egale.

Soluţie. Fie $s_n = x_n + y_n, p_n = x_n y_n$.

a) Avem $x_{n+1} \geq \frac{1}{2} s_n \geq \sqrt{p_n}$, $y_{n+1} \geq \frac{1}{2} s_n \geq \sqrt{p_n}$, de unde $s_{n+1} \geq s_n$, $p_{n+1} \geq p_n$ **2p**

b) Dacă $(s_n)_{n\geq 1} \to \infty$, atunci $(x_n)_{n\geq 1} \to \infty$, $(y_n)_{n\geq 1} \to \infty$ **2p**
Dacă $(s_n)_{n\geq 1} \to s \in \mathbb{R}$, atunci şirul p_n este mărginit superior de $\frac{1}{4}s^2$, deci are o limită finită $p \leq \frac{1}{4}s^2$. Pe de altă parte, din ipoteză rezultă $p_{n+1} \geq \frac{1}{4}s_n^2$, deci $s^2 = 4p$. Deoarece $x_n, y_n \in \{\frac{1}{2}(s_n \pm \sqrt{s_n^2 - 4p_n})\}$, reiese $|x_n - \frac{1}{2}s_n| = |y_n - \frac{1}{2}s_n| = |\sqrt{s_n^2 - 4p_n}| \to 0$, de unde $(x_n)_{n\geq 1} \to \frac{1}{2}s$, $(y_n)_{n\geq 1} \to \frac{1}{2}s$ **3p**

Subiectul 4. Să se determine pentru ce valori ale lui $a \in [0, \infty)$ există funcţii continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $f(f(x)) = (x - a)^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Dacă $a = 0$, atunci avem funcţia dată de $f(x) = |x|^{\sqrt{2}}$ **2p**
Apoi, restricţia funcţiei la $[a, \infty)$ este injectivă iar f este continuă, deci este strict monotonă pe $[a, \infty)$; analog pentru $(-\infty, a]$. Cum f nu este monotonă pe $\mathbb{R}$ şi este nemărginită superior, f este strict descrecătoare pe $(-\infty, a]$ şi strict crescătoare pe $[a, \infty)$ **2p**
Astfel $f([a, \infty)) = f((-\infty, a]) = [f(a), \infty)$ şi a este punctul (unic) de minim absolut, deci $f(a) \leq f(f(a)) = 0$. Dacă $f(a) = 0 = f(f(a))$, atunci $a = f(a) = f(f(a)) = 0$. Arătăm că situaţia $f(a) < 0$ este imposibilă. Într-adevăr, în acest caz fie $b > a$ astfel încât $f(b) < 0$. Atunci, există $c \in (a, \infty)$ astfel încât $b = f(c)$, de unde $(c - a)^2 = f(f(c)) = f(b) < 0$, imposibil **3p**